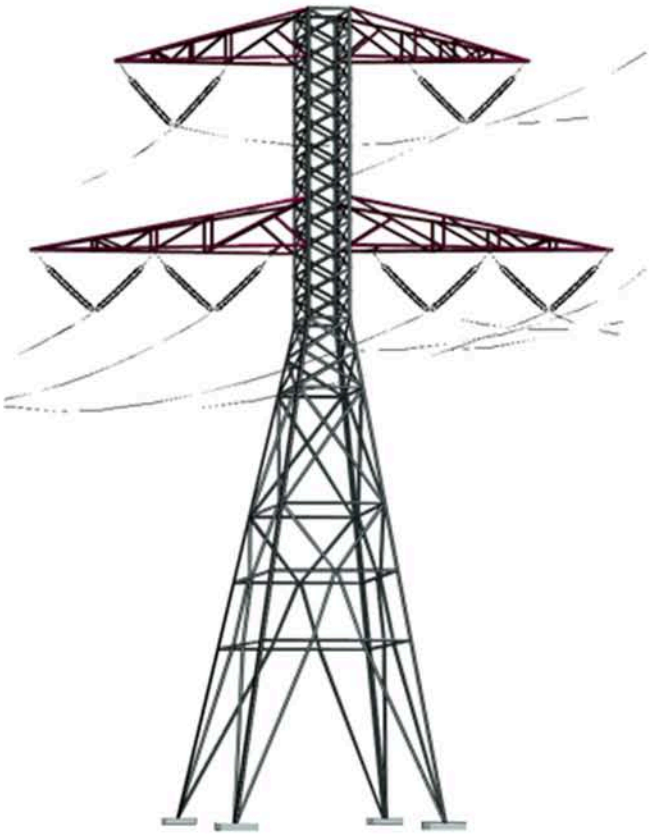
ANÁLISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

© Prof. Engº esp Luiz Antonio Vargas Pinto

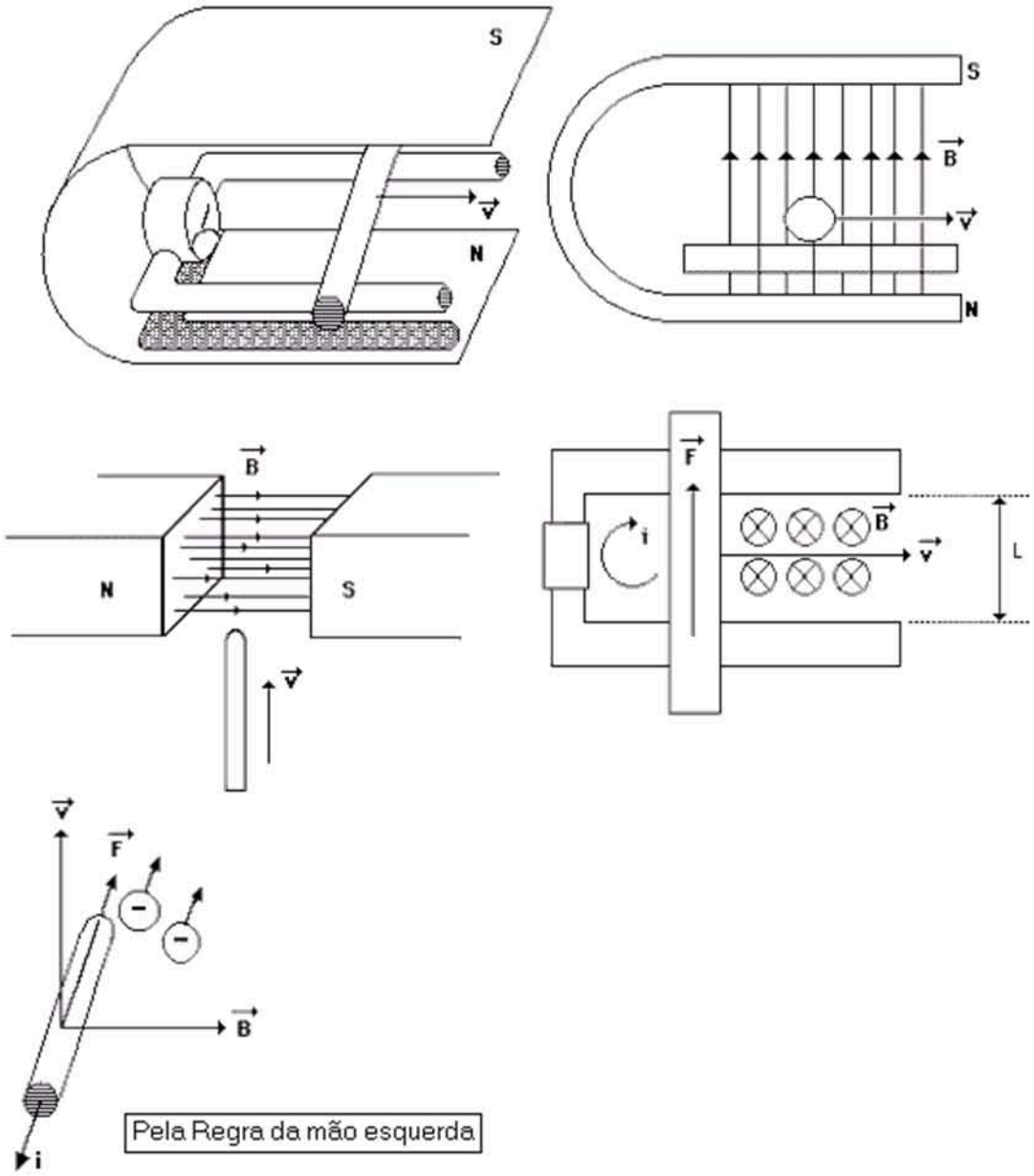
2008

Revisado em 2021



Geração de Corrente alternada..... 2
Fluxo magnético..... 2
Frequência de um sinal senoidal..... 4
Lei de Ohm para circuitos de corrente alternada..... 6
  Circuito RL série 8
  Circuito RL série real 9
  Circuito RL Paralelo 10
  Circuito RC série 11
  Circuito RC paralelo 12
Potência em Corrente Alternada..... 13
Fator de potência..... 14
Frequência de ressonância em circuito RLC série..... 15
Frequência de ressonância em circuito RLC paralelo..... 18
Fator de qualidade e banda passante..... 20
Geração de Trifásico..... 21
  Defasagem 22
Ligação estrela..... 22
  Ligação estrela em trifásico equilibrado 23
    Diagrama de fasores..... 24
Ligação Triângulo..... 24
Conversão estrela – triângulo..... 25
Exercícios:..... 25

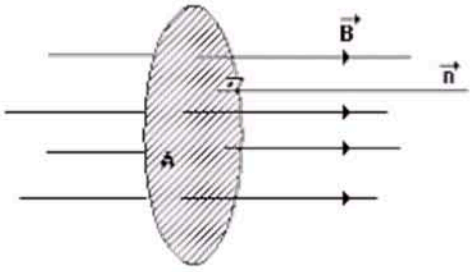
Geração de Corrente alternada



$F_{EM} = B\,L\,V$ e $I = F_{EM} / R$

Fluxo magnético

Para medirmos a intensidade de fluxo magnética fazemos:

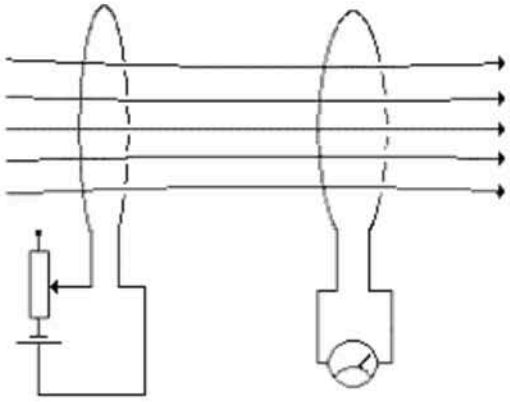


$\phi = BA \cos \alpha$

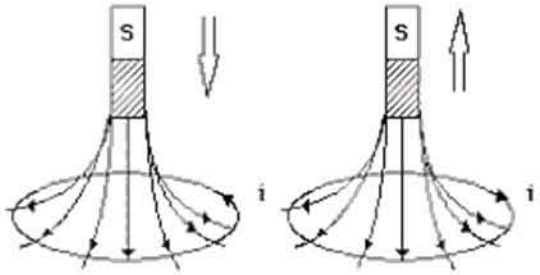
onde $[\phi] = Wb/m^2$

α = ângulo entre n e B

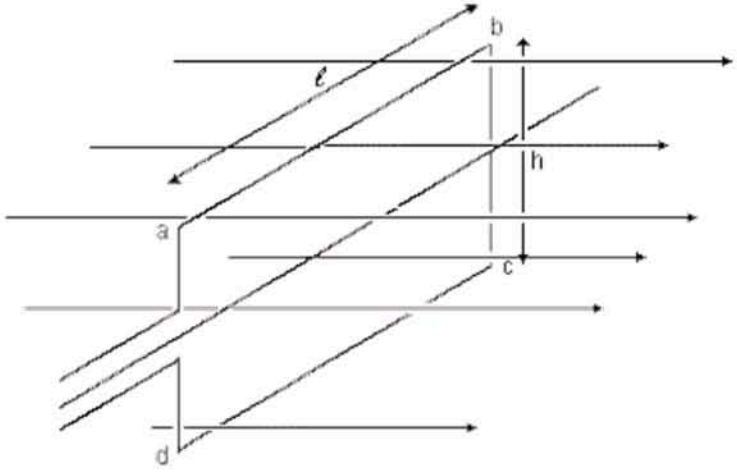
Fazendo variar o fluxo de corrente elétrica na primeira espira variamos o fluxo de campo magnético o que forçosamente altera a corrente induzida na segunda espira.



E temos a lei de Lenz:



Considere a espira com as seguintes dimensões:



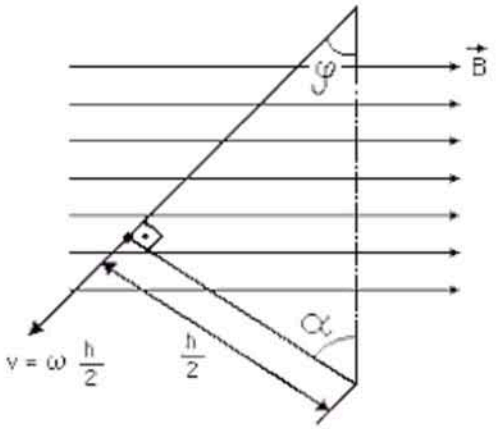
Sabendo que:

$$\phi = BA \cos \alpha$$

$$d\phi = -BA \operatorname{Sen} \alpha \ \frac{d\alpha}{dt}$$

que é o campo de uma espira. Mas como temos n espiras então:

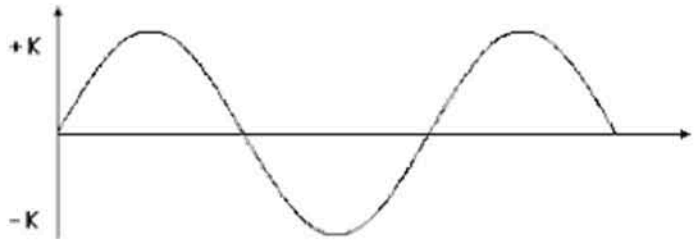
$$\xi = n B A \omega \operatorname{Sen} \alpha$$



cujo máximo ocorre quando $\alpha = 90°$ e que como podemos ver claramente ocorre justamente quando a bobina esta paralela ao campo magnético. E como o campo B é uniforme, então:

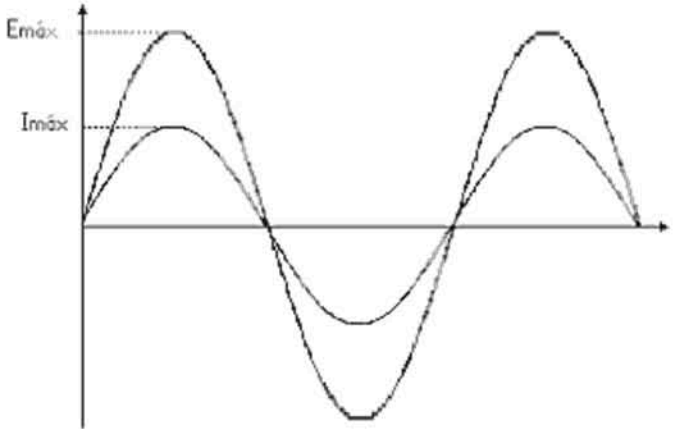
$$\xi = k \operatorname{Sen} \alpha$$

e assim:

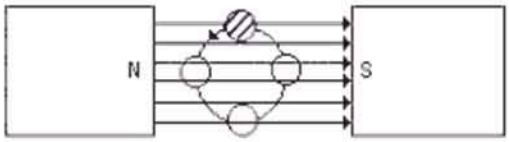


e como é constante podemos definir $\alpha = 2\pi f \omega t$

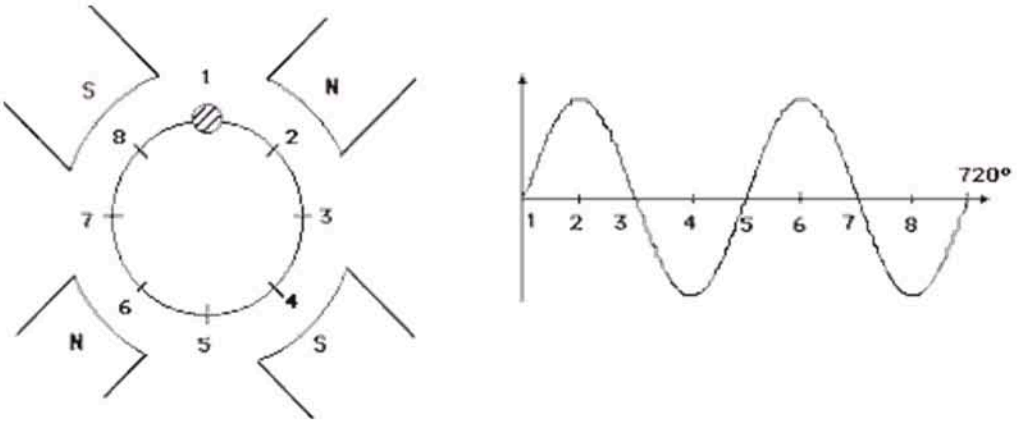
Frequência de um sinal senoidal



Vejamos o seguinte esquema onde temos um condutor perpendicular ao campo magnético girando no sentido anti-horário.



Se o condutor seguir girando por t segundos, ao final desse tempo terá realizado n revoluções por t segundos, ou ainda, m ciclos por segundo, que é uma notação muito mais comum. E como o movimento é circular, então a velocidade será angular e medida em radianos/segundo ou simplesmente Rad/s, expresso por $\omega = 2.\pi.f$. Vamos tomar um exemplo prático de um gerador com 4 pólos conforme a figura abaixo:



Considerando que este condutor percorra o espaço entre um norte e um sul, isto significa que este percorreu 360° elétricos (indo de 1 a 5, por exemplo). Completa-se um ciclo desta natureza cada vez que o condutor percorre um par de pólos. Isto significa que a frequência em ciclos/segundo equivale portanto ao número de pares de pólos atravessados por segundo, ou:

$$f = \frac{PN}{120}$$

Onde P = número de pólos
N = revoluções/minuto
f = frequência em Hz

Exemplo 1:

Um alternador de corrente, acionado por uma máquina a uma frequência de 60 ciclos/segundo tem velocidade de 120 rpm. Quantos pólos tem este alternador ?

P = (120 x 60) / 120 = 120 pólos

Exemplo 2:

Um alternador, a 600 rpm com 10 pólos, gira com qual frequência ?

f = (600 x 10) / 120 = 50 Hz

Exemplo 3:

Um alternador tem 6 pólos e gira a uma frequência de 25 Hz. Qual o número de revoluções/minuto ? f = (120 x 25) / 6 = 500 rpm

$I_{MED} = \frac{2I_{MAX}}{\pi}$	I= I_{MAX} Sen ωt	$I_{EF} = \frac{I_{MAX}}{\sqrt{2}}$

Lei de Ohm para circuitos de corrente alternada

Considere o caso de um indutor cuja resistência própria **r** e cuja indutância **L**, conforme o esquema seguinte:

A passagem de uma corrente elétrica **i** através dessa bobina, gera um campo magnético dado pela equação B = L i. Agora, se a corrente é variável então o fluxo também o é. Por essa razão forma-se no circuito uma f_{EM} induzida dada pela equação ao lado.

$$V = L\frac{di}{dt}$$

No caso de um circuito com resistência muito elevada e indutância desprezível a representação seguindo a norma da ABNT, seria:

O circuito nessa condição é dito puramente resistivo. Na prática quase todos os condutores percorridos por uma corrente produzem campo

magnético e por essa razão, um circuito puramente resistivo é apenas um caso teórico. No caso de um circuito cuja indutância é muito superior a resistência ôhmica, podemos considerar como puramente indutivo, sendo representado por:

Temos como principal exemplo deste caso, o enrolamento de transformador e das máquinas elétricas em geral, que pelo fato de serem enroladas sobre ferro, possuem efeitos indutivos muito intensos e resistência elétrica desprezível.

Uma vez dada a expressão $I(t) = I_{max}\,\mathrm{Sen}\,(\omega t)$ que colocada na expressão da f_{em} induzida da bobina, resulta:

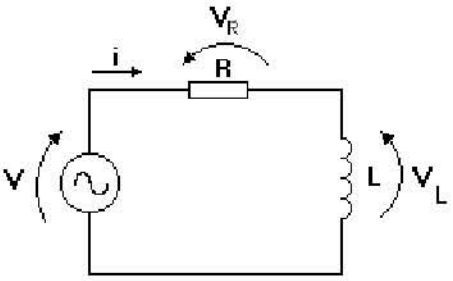
$$V = L\frac{dI(t)}{dt} = L\frac{d[I_{max} \times \sin(\omega t)]}{dt} = \omega \times L \times I_{max} \times \cos(\omega t) = \omega \times L \times I_{max} \times \sin(\omega t + 90°)$$

isto é, a queda de tensão existente nos extremos do circuito é alternada e senoidal, com valor máximo igual a $E_{MAX} = \omega\, L\, I_{MAX}$ defasada em relação a corrente de 90° (adiantada). Para valores eficazes, podemos considerar que $E_{EF} = \omega\, L\, I$ e indicando o produto $\omega\, L$ pode-se escrever $E_{EF} = X_L\, I$ o qual representa o comportamento do indutor na lei de Ohm para circuitos de corrente alternada. Denominamos ainda X_L como Reatância Indutiva, expressa em Ω, tal que:

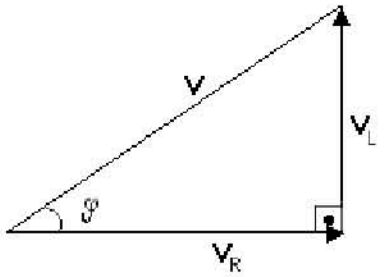
$$X_L = 2 \times \pi \times f \times L$$

Circuito RL série

Considere o circuito de corrente alternada com um indutor de resistência desprezível em série com um resistor R:



Pela lei de Ohm, a tensão consumida pelo resistor pode ser definida com $V = R\,i$ e da mesma forma $V_L = X_L\,i$ pois o circuito é série e a corrente **i** é a mesma para ambos. Graficamente representamos:



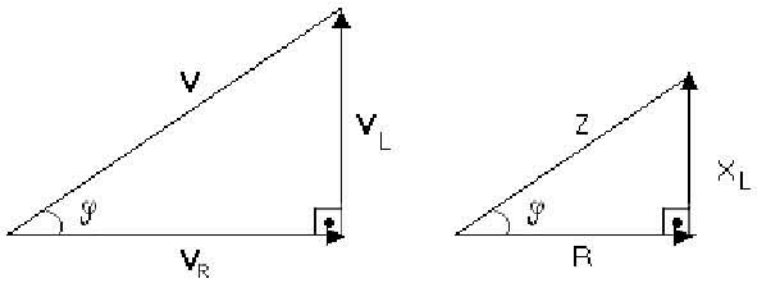
De onde vemos claramente que $V = V_L + V_R$ (vetorialmente), o que corresponde dizer que:

$$V = \sqrt{V_L^2 + V_R^2} = \sqrt{X_L^2 \cdot i^2 + R^2 \cdot i^2}$$

$$V = i \cdot \sqrt{X_L^2 + R^2} \Rightarrow \frac{V}{i} = \sqrt{X_L^2 + R^2}$$

mas $Z = \frac{V}{i} \therefore Z = \sqrt{X_L^2 + R^2}$

No tocante ao triângulo das impedâncias podemos provar que:

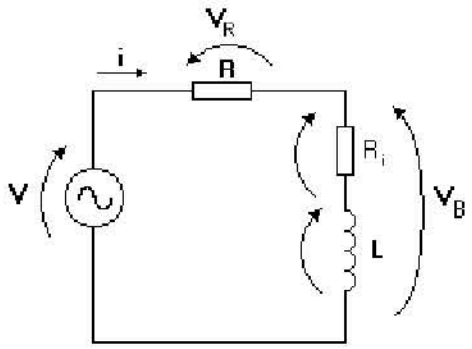


e ainda:

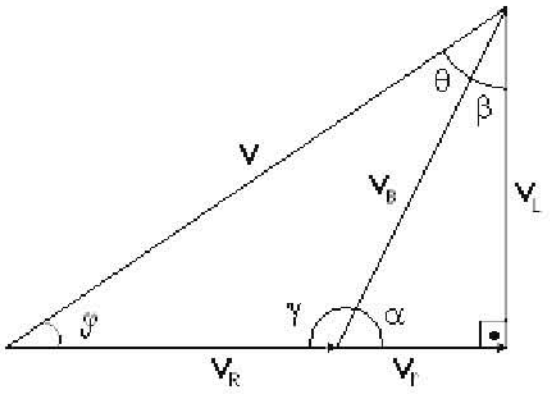
$$\text{Sen}\varphi = \frac{X_L}{Z} \quad \text{Cos}\varphi = \frac{R}{Z} \quad \text{Tg}\varphi = \frac{X_L}{R}$$

Circuito RL série real

No caso real, o indutor é tratado com um indutor associado em série com um resistor R_i que representa a resistência interna da bobina L.



Pela lei de Ohm, a tensão consumida pela resistência própria da bobina pode ser definida como $V_R = R_i \cdot i$ e da mesma forma $V_L = X_L \cdot I$ pois o circuito é série e a corrente **i** é a mesma para ambos. Graficamente podemos representar:



De onde vemos claramente que:

$$V = \vec{V}_R + \vec{V}_L + \vec{V}_r$$

$$V^2 = V_L^2 + (V_R + V_r)^2 \Rightarrow V = \sqrt{X^2 \times i^2 + (R \times i + r \times i)^2}$$

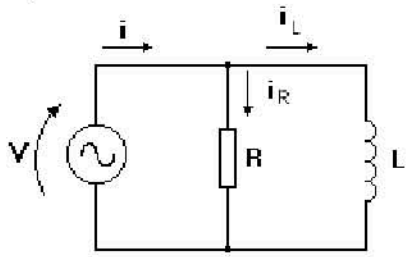
$$V = \sqrt{X^2 \times i^2 + (R+r)^2 \times i^2} = i \times \sqrt{X^2 + (R+r)^2}$$

$$\frac{V}{i} = \sqrt{X^2 + (R+r)^2}$$

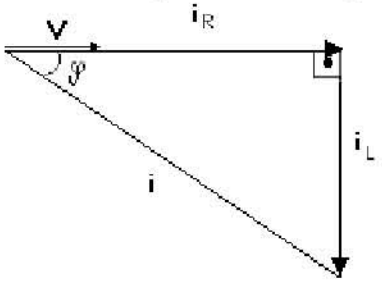
$$\therefore \quad Z = \sqrt{X^2 + (R+r)^2}$$

Circuito RL Paralelo

Dado seguinte circuito:



Graficamente podemos representar:



De onde podemos ver que:

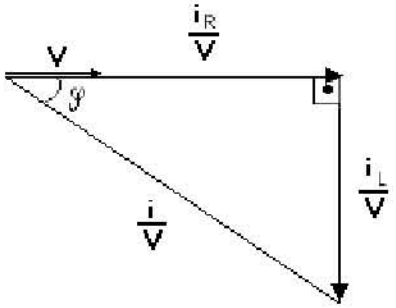
$$i = \sqrt{i_L^2 + i_R^2} \Rightarrow \frac{i}{V} = \sqrt{\left(\frac{i_L}{V}\right)^2 + \left(\frac{i_R}{V}\right)^2}$$

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{X_L^2} + \frac{1}{R^2}}$$

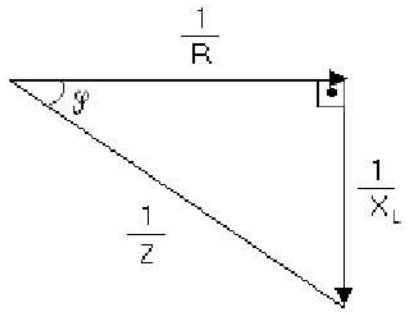
E portanto:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(2 \times \pi \times f \times L)^2} + \frac{1}{R^2}}}$$

Mantendo-se as devidas proporções, teremos:



E que resulta em:



De onde:

$$Cos\varphi = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{Z}} = \frac{Z}{R} \quad Sen\varphi = \frac{\frac{1}{X_L}}{\frac{1}{Z}} = \frac{Z}{X_L} \quad \text{e} \quad Tan\varphi = \frac{\frac{1}{X_L}}{\frac{1}{R}} = \frac{R}{X_L}$$

Circuito RC série

O capacitor é um elemento representado por duas placas separadas por uma distância d sendo que entre as placas existe um dielétrico. A norma ABNT normalmente o representa:

E a medida de capacitância é dada em Farad (F) ou seus submúltiplos. Matematicamente, podemos definir a relação entre a tensão e a corrente aplicados a um capacitor pela equação:

$$i = C\frac{dV}{dt} \quad \text{e} \quad \mathrm{V} = V_{MAX}Sen(\omega t)$$

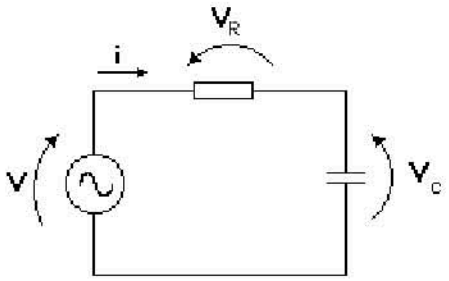
de onde:

$$i = C\frac{d\left(V_{MAX}Sen(\omega t)\right)}{dt} = \omega C V_{MAX}Cos(\omega t) = \omega C V_{MAX}Sen(\omega\, t + 90\,^{\circ})$$

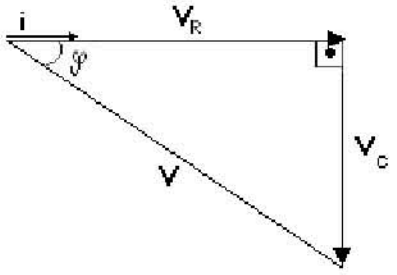
e podemos observar que a corrente está 90° adiantada em relação a tensão ou podemos dizer que a tensão esta 90° atrasada em relação a corrente. De qualquer forma, é facilmente visível que I_{max} ocorre com Sen(ωt+90°)=1, o que significa que:

$$i_{MAX} = \omega C V_{MAX} \Rightarrow \frac{i_{MAx}}{V_{MAX}} = \omega C \Rightarrow \frac{V_{MAX}}{i_{MAX}} = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow X_C = \frac{1}{2\pi f C}$$

Tratando-se de um circuito real, existe a presença do resistor e o circuito mais elementar seria o circuito RC série:



cujo triângulo de tensões é representado por:



mas como o triângulo é retângulo, então:

$$V^2 = V_R^2 + V_C^2 \Rightarrow V = \sqrt{V_R^2 + V_C^2}$$

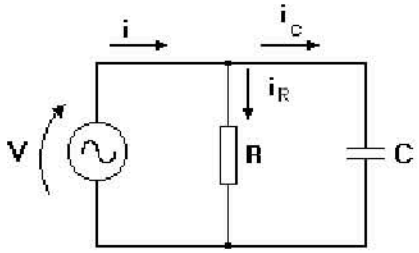
mas $V = Zi$, $V_R = Ri$ e $V_C = X_C i$ que substituindo resulta em:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

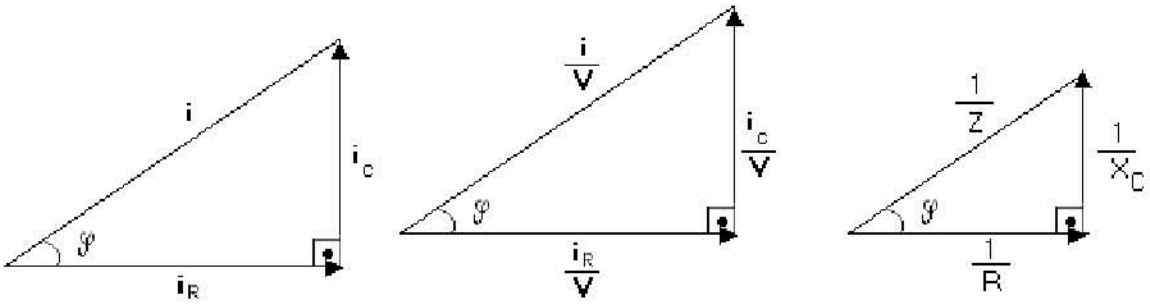
e mais ainda:

$$Tg\varphi = \frac{V_C}{V_R} = \frac{X_C}{R}$$

Circuito RC paralelo



cujo triângulo de correntes é representado por:



De onde:

$$i = \sqrt{i_C^2 + i_R^2} \quad \text{ou} \quad \frac{i}{V} = \sqrt{\left(\frac{i_C}{V}\right)^2 + \left(\frac{i_R}{V}\right)^2} \quad \textit{ou ainda} \quad \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{X_C^2} + \frac{1}{R^2}}$$

e $X_C = \dfrac{1}{2 \times \pi \times f \times C}$

E portanto:

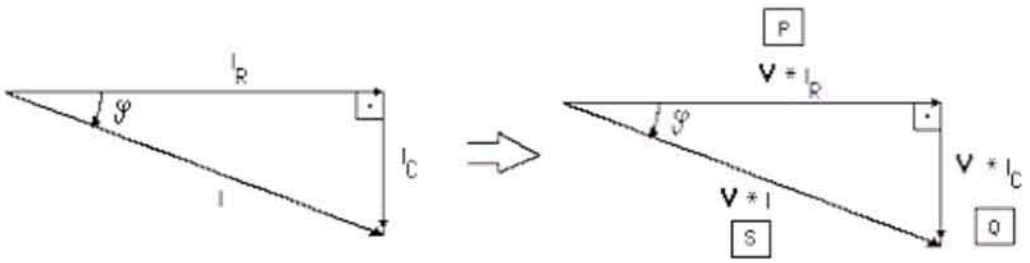
$$Z = \frac{1}{\sqrt{(2 \times \pi \times f \times C)^2 + \frac{1}{R^2}}}$$

Mantendo-se as devidas proporções, teremos:

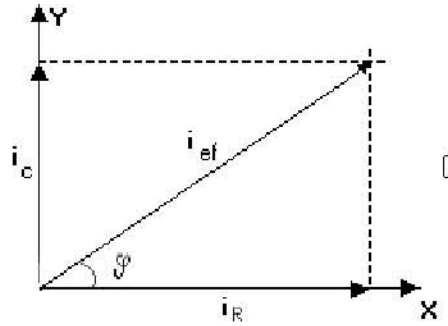
$$Cos\varphi = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{Z}} = \frac{Z}{R} \qquad Sen\varphi = \frac{\frac{1}{X_C}}{\frac{1}{Z}} = \frac{Z}{X_C} \quad \text{e} \quad Tan\varphi = \frac{\frac{1}{X_C}}{\frac{1}{R}} = \frac{R}{X_C}$$

Potência em Corrente Alternada

Vamos tomar como exemplo para estudo o circuito RC paralelo, mas o que iremos demonstrar serve para qualquer um dos circuitos apresentados anteriormente:



Daí vem que:



$$i_c = i_{ef} \operatorname{Sen} \varphi$$
$$i_R = i_{ef} \operatorname{Cos} \varphi$$

De onde concluímos que:

$$V \times i_{ef} = \text{Potência Aparente (VA)} \quad [S]$$
$$V \times i_{ef} \operatorname{Sen} \varphi = \text{Potência Reativa (VAr)} \quad [Q]$$
$$V \times i_{ef} \operatorname{Cos} \varphi = \text{Potência Ativa (Watt)} \quad [P]$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Cos} \varphi = \frac{S}{P} = \frac{\text{Potência Aparente}}{\text{Potência Ativa}}$$

E daí a designação fator de potência. Isto é, a relação entre as potências.

Fator de potência

A energia elétrica é destinada a vários fins, porém, a classificação de seu aproveitamento é feita em 3 grupos fundamentais:

a) Luz;
b) Aquecimento;
c) Força.

LUZ: A iluminação doméstica é feita em geral por lâmpadas incandescentes, as quais constituem carga ôhmica e trabalham com fator de potência = 1. Hoje porém, o uso de lâmpadas fluorescentes, muito difundido em meios comerciais, constituem uma sistema de energia que opera com fator de potência inferior a 1, o que requer cuidados maiores para evitar um fator de potência muito baixo.

AQUECIMENTO: O aquecimento, excluídos alguns poucos casos de exceção, baseiam-se em princípio da indução eletromagnética e em geral também são constituídos de cargas ôhmicas.

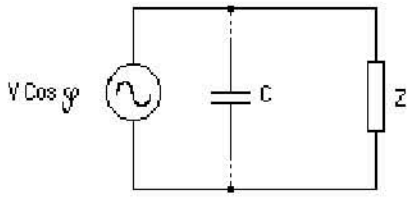
FORÇA: Como já é de nosso conhecimento, todos os motores elétricos de uso industrial baseiam-se em princípios eletromagnéticos, assim é perfeitamente aceitável que estes gerem intensos campos magnéticos,

constituindo-se em indutores e portanto com fator de potência inferior a 1.

Por esta mesma razão é compreensível que estes absorvam da linhas aos quais estão conectados, elevadas potências reativas, as quais não produzem trabalho útil e inclusive são danosas, pois sobrecarregam inutilmente as redes elétricas, reduzindo a capacidade destas e diminuindo seu tempo de vida útil. É claro que quanto menor for o fator de potência, tanto mais intenso é o efeito indesejável comentado acima.

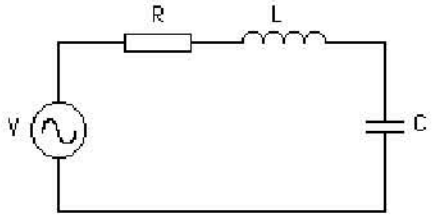
As concessionárias de energia, que vendem exclusivamente energia REAL, que é aquela mostrada no medidor de energia seriam prejudicadas se os consumidores possuíssem equipamentos com características indutivas, típicas de motores e que normalmente possuem baixo fator de potência.

Assim eles obrigam os consumidores melhorarem suas instalações. Normalmente para esta finalidade são utilizados bancos de capacitores que possuem a propriedade de elevar o fator de potência, comum em instalações de motores. Estes são colocados em paralelo com as cargas.

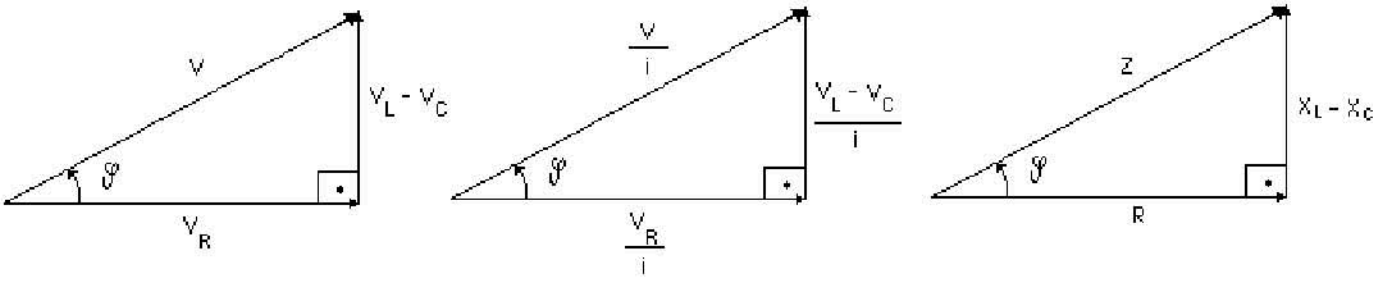


Frequência de ressonância em circuito RLC série

Quando é estabelecida a igualdade entre a reatância capacitiva e a reatância indutiva, o que determina a igualdade entre as tensões V_L e V_C dizemos que o circuito está em **ressonância**.



Esta condição, desejável em vários circuitos eletrônicos, pode trazer consequências desastrosas, com danos para os componentes do circuito quando não é prevista, caso típico de redes elétricas e linhas de transmissão. É bastante interessante o estudo da frequência de ressonância pelo fato desta depender do comportamento da impedância Z em função da variação da frequência. Para podermos fazer um estudo completo deste fenômeno, iniciaremos com uma análise do comportamento de X_C e de X_L em função da variação da frequência. A análise deste circuito resulta em:



Sabendo que :

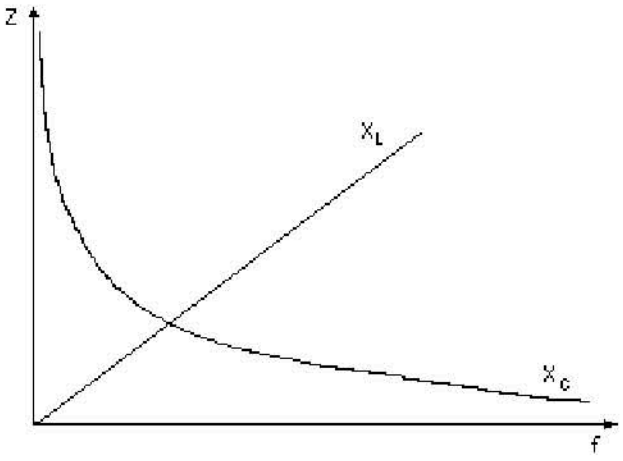
$$X_L = 2\times\pi\times f\times L \quad \text{e} \quad X_C = \frac{1}{2\times\pi\times f\times C}$$

Podemos definir a impedância deste circuito pela equação:

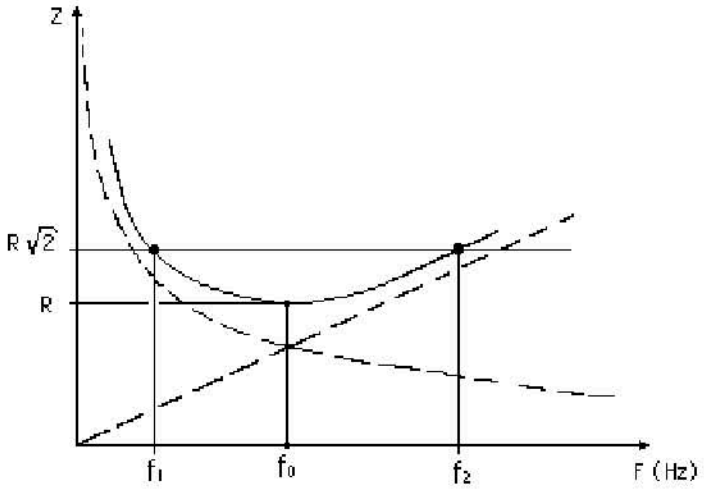
$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + \left(2\times\pi\times f\times L - \frac{1}{2\times\pi\times f\times C}\right)^2}$$

que fazendo variar a frequência a partir de um valor pequeno, próximo de zero (0), (note que não é possível o **valor zero** para o estudo do comportamento de **X_C**, pois este é **indeterminado**) e concluindo quando este tende a infinito, vamos estudar o comportamento da impedância.

O gráfico seguinte representa o comportamento de **X_L** e **X_C** com a variação de frequência. Considerando ainda que **X_L**=f(f) e **X_C**=f(f), pois:



O que de fato ocorre com a frequência é representado pela composição das duas curvas:



E, neste caso, a chamada "frequência de ressonância" ocorre quando $X_L = X_C$, ou:

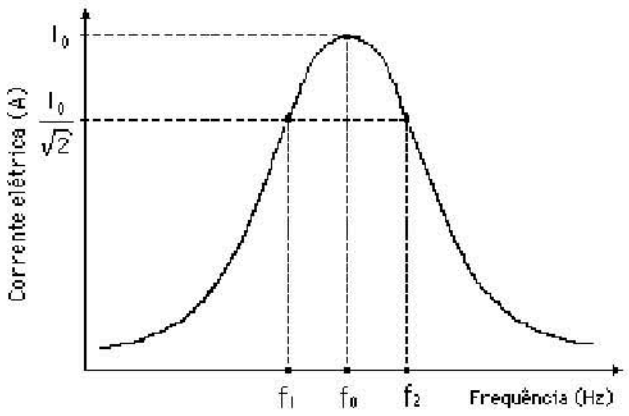
$$2\times\pi\times f\times L = \frac{1}{2\times\pi\times f\times C} \Rightarrow 4\times\pi^2\times f^2\times L\times C = 1 \Rightarrow f^2 = \frac{1}{4\times\pi^2\times L\times C}$$

De onde:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

E é suficientemente claro que, como a impedância é elevada, em ambos os extremos, tanto a esquerda como a direita da frequência de ressonância f_0, nessa situação o gerador que alimentar essa carga não será muito exigido, mas o mesmo não podemos afirmar quando a frequência estiver próxima

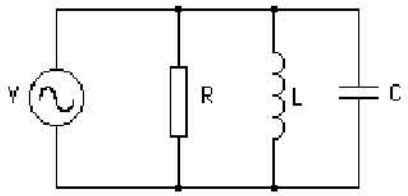
de f_0 porque essa proximidade causa a diminuição da impedância e consequente aumento da corrente elétrica, ou graficamente:



Frequência de ressonância em circuito RLC paralelo

De maneira análoga ao circuito série, temos da mesma forma que quando é estabelecida a igualdade entre a reatância capacitiva e a reatância indutiva, o que determina a igualdade entre as tensões V_L e V_C dizemos que o circuito está em ressonância. Este caso merece maior destaque devido ao fato de que as instalações em geral são feitas com cargas em paralelo e não em série.

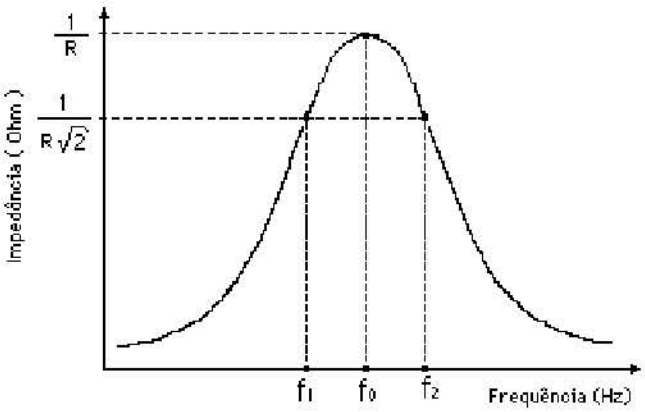
Conforme foi dito anteriormente é interessante o estudo da frequência de ressonância pelo fato da impedância Z depender da variação da frequência. Para podermos fazer um estudo completo deste fenômeno, iniciaremos com uma análise do comportamento de X_L e de X_C em função da variação da frequência. Vejamos o circuito.



Sabendo que X_C e X_L ainda são válidos podemos definir a impedância deste circuito partindo do triângulo das correntes (a tensão é a mesma em todas as cargas pois estas estão em paralelo):

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left[\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right]^2} \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left[\frac{1}{2\pi f L} - 2\pi f C\right]^2}}$$

e fazendo variar a frequência a partir de um valor pequeno, próximo de zero, (note que não é possível o valor **zero** para o estudo de X_C, porque este é indeterminado) concluímos que este tende a infinito. Assim será estudado o comportamento da impedância de uma forma geral.



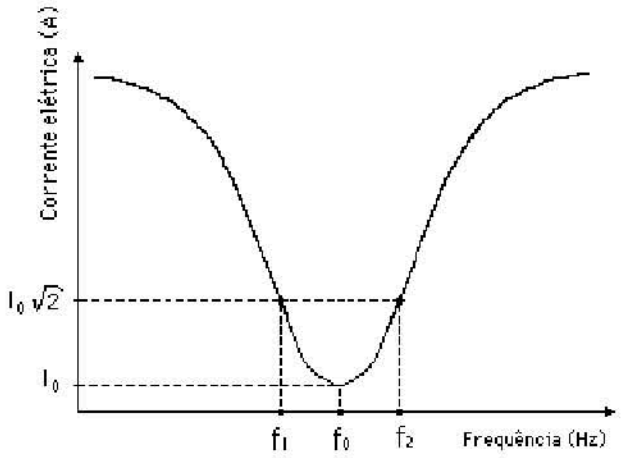
E também neste caso a frequência de ressonância ocorre quando $X_L = X_C$, ou:

$$2\times\pi\times f\times L = \frac{1}{2\times\pi\times f\times C} \Rightarrow 4\times\pi^2\times f^2\times L\times C = 1 \Rightarrow f^2 = \frac{1}{4\times\pi^2\times L\times C}$$

E então:

$$f_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Que, como se pode ver, é a mesma que para o circuito série. E é suficientemente claro que, como a impedância é mínima em ambos os extremos, tanto a esquerda como a direita da frequência de ressonância, e nessa situação gerador que alimentar essa carga é muito exigido. Já não se pode afirmar o mesmo quando aproximamos de f_0 pois nesse caso teremos um aumento da impedância e consequente redução da corrente elétrica, ou:



Fator de qualidade e banda passante

Em um circuito real, é impossível obter-se um valor exato de frequência de ressonância devido a variação própria dos elementos de circuito (expresso em %). Assim toma-se como resultado prático e útil, uma faixa em torno da f_0 limitada por $\mathbf{f_1}$ e $\mathbf{f_2}$ que correspondem na curva á $\mathbf{R/\sqrt{2}}$ que é considerado um valor ótimo para aplicações de circuitos sintonizadores de Rádio, TV e filtros. Na realidade, este valor corresponde a condição de Potência média. E pode-se demonstrar que:

$$f_0 = \sqrt{f_1 \times f_2}$$

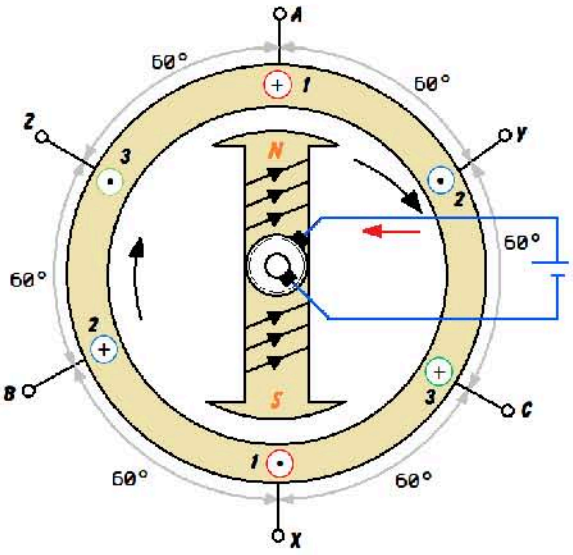
e que para o circuito série:

$$Q_0 = \frac{X_L}{R} = \frac{2\pi fL}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

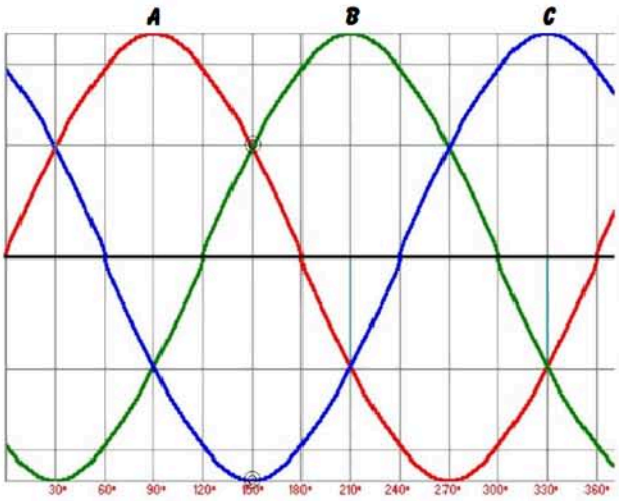
e para o paralelo:

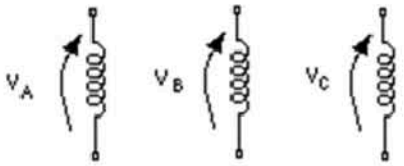
$$\frac{f_0}{f_2 - f_1} = \frac{R}{2\pi fL}$$

Geração de Trifásico



Onde os sinais gerados estão assim distribuídos:



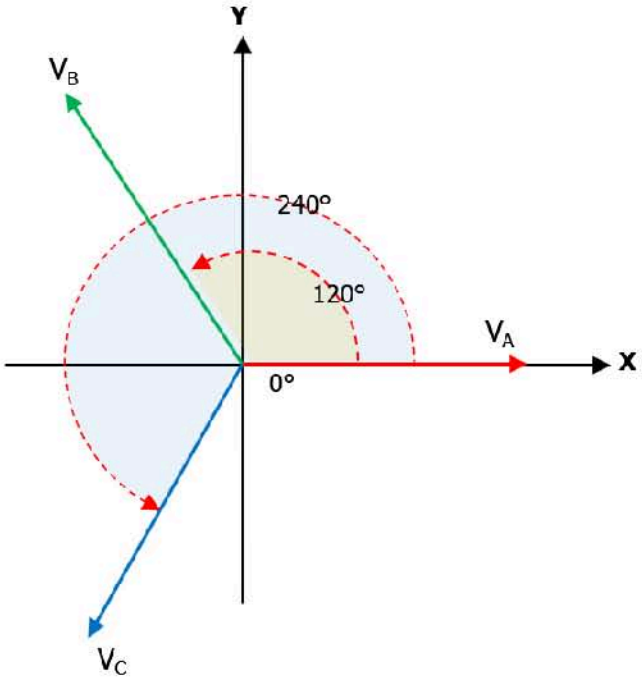


Em função da geração de trifásico obedecer uma construção física das bobinas de 120°, deve-se estabelecer uma referência para a geração das fases. Claro que a tensão gerada tem mesma intensidade mas é principalmente devido ao fato da construção física a diferença das defasagens.

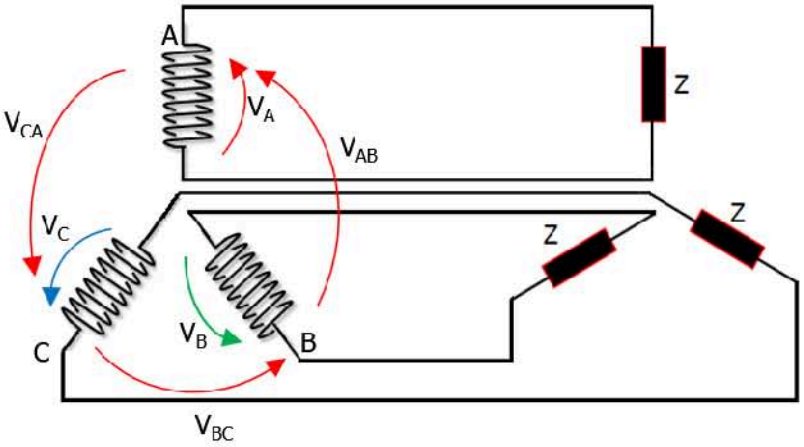
A definição de sequência de fase é a ordem na qual as tensões tem máxima amplitude. É evidente que alternadamente, cada uma das fases atinge o máximo e somente uma de cada vez, assim, no gráfico acima podemos tranquilamente dizer que a sequência de fase é ABC, sendo V_{AX}, V_{BY} e V_{CZ} respectivamente as tensões que vão ao máximo.

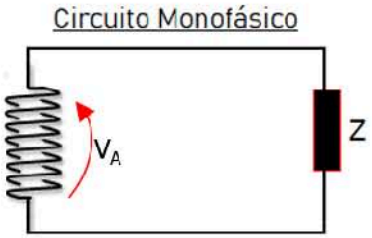
Defasagem

A defasagem de 120° é causada pela construção dos geradores que tem suas bobinas enroladas separadas por 120° elétricos que são dependentes da geometria do aparelho.



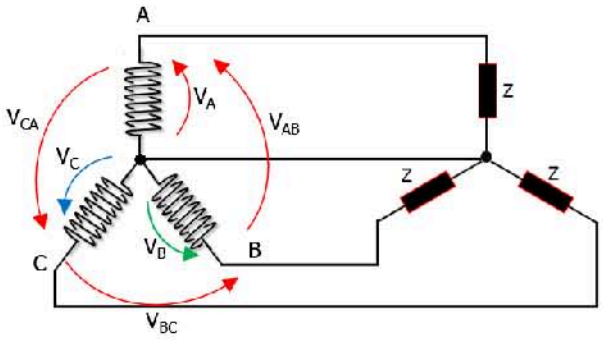
Ligação estrela

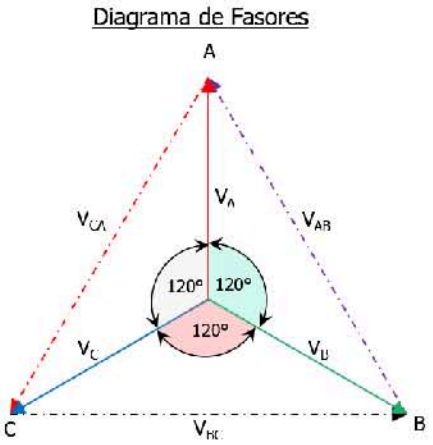




Observe que neste caso a corrente de linha igual a corrente de fase. Na ligação estrela, podemos analisar o gerador trifásico como sendo três monofásicos com o centro comum (N).

Ligação estrela em trifásico equilibrado





Onde:

V_A, V_B e V_C são chamadas de tensão de *fase*

V_{AB}, V_{BC} e V_{CA} são chamadas de tensão de *linha*

Mas aqui:

Corrente de linha = Corrente de fase

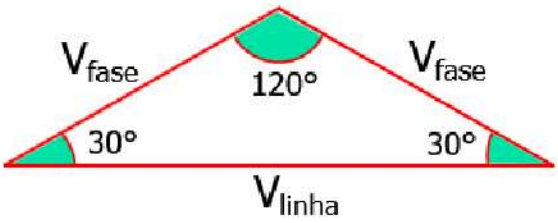
E ainda:

$V_{AB} = V_A - V_B$

$V_{BC} = V_B - V_C$

$V_{CA} = V_C - V_A$

Genericamente:



que aplicando a lei dos senos:

$$\frac{V_{Linha}}{\sin(120°)} = \frac{V_{Fase}}{\sin(30°)} \qquad \text{mas:} \quad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

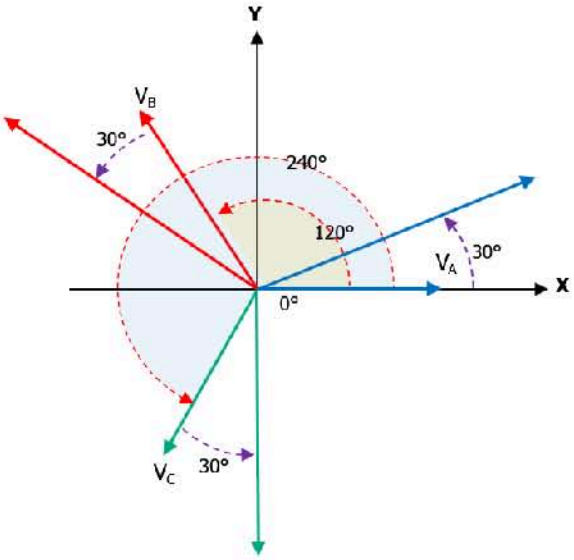
$$\frac{V_{Linha}}{[\sin(60°)\cos(60°) + \sin(60°)\cos(60°)\ ]} = \frac{V_{Fase}}{\sin(30°)}$$

$$\frac{V_{Linha}}{[2 \times \sin(60°)\cos(60°)\ ]} = \frac{V_{Fase}}{\sin(30°)} \Rightarrow V_{Linha} = \frac{V_{Fase}}{\sin(30°)} \times 2 \times \sin(60°)\cos(60°)$$

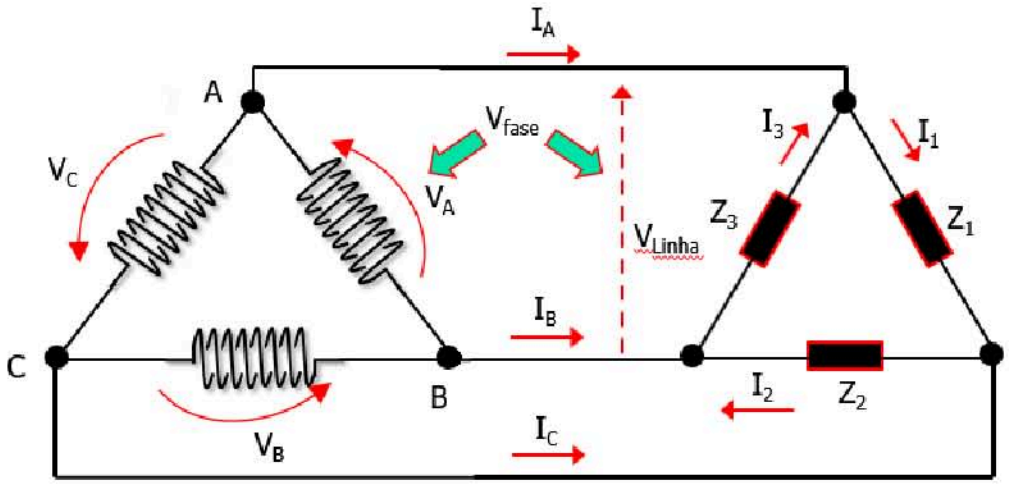
$$V_{LINHA} = V_{FASE} \times \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = V_{FASE} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}$$

e portanto: $V_{LINHA} = V_{FASE} \times \sqrt{3}$

Diagrama de fasores



Ligação Triângulo



E aqui:

Tensão de linha = Tensão de fase

e:

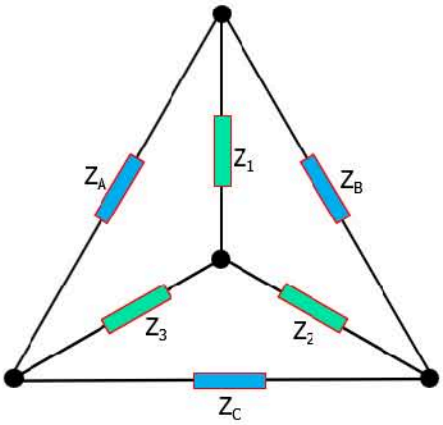
$I_A = I_1 - I_3$

$I_B = I_3 - I_2$

$I_C = I_2 - I_1$

e da mesma forma que no caso de ligação estrela, $I_{LINHA} = \sqrt{3}\ I_{FASE}$

Conversão estrela – triângulo



Estrela → Triângulo	Triângulo → Estrela
$Z_A = \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}{Z_2}$	$Z_1 = \frac{Z_AZ_B}{Z_A + Z_B + Z_C}$
$Z_B = \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}{Z_3}$	$Z_1 = \frac{Z_BZ_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$
$Z_C = \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}{Z_1}$	$Z_1 = \frac{Z_CZ_A}{Z_A + Z_B + Z_C}$

Exercícios:

1: Dado um sistema trifásico em estrela equilibrado com $20\angle 20°\Omega$ e um triângulo equilibrado com $42\angle 30°\Omega$ em 3 fios do secundário de um transformador onde V = $480\angle 30°$ V. Calcule as correntes de linha.

2: Dado um sistema trifásico em triângulo equilibrado com $39\angle -40°\Omega$ em 3 fios com 4Ω de impedância cada um. Dada a tensão de linha = 480 V, calcule as correntes de linha.